

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICĂTĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ
2 mai 2015



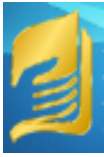
FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA A IX-A

- O barcă merge pe un râu în aval (în sensul curgerii râului) și în amonte (în sens opus curgerii râului), parcurgând în total 56 km în 3 ore. Viteza bărcii în aval este de 20 km/h iar în amonte de 16 km/h . Se cere:
 - Determinați viteza curentului apei pe râu și viteza pe care ar fi avut-o barca dacă s-ar fi deplasat uniform, în aceleași condiții, pe un lac.
 - Determinați cele două distanțe parcurse de barcă pe râu, prima în aval și a doua în amonte.
- Fie patrulaterul convex $ABCD$ și $M \in (AC)$, $N \in (BD)$ mijloacele diagonalelor.
 - Arătați că $2 \cdot \overline{MN} = \overline{AB} + \overline{CD}$.
 - Dacă punctele M și N coincid, demonstrați că $ABCD$ este paralelogram.
- În cadrul unui studiu demografic s-a constatat că numărul a_n de locuitori ai unei localități nou înființate, în care $n \in \mathbb{N}$ este numărul de ani scurs de la înființarea localității, este modelat prin relația $a_{n+1} - a_n = 2n - 11$, cu număr de locuitori inițial $a_0 = 100$.
 - Aflați, prin această relație, câți locuitori ar avea localitatea după doi ani de la înființare.
 - Arătați că $a_n = n^2 - 12n + 100$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
 - Determinați numărul minim de locuitori pe care îl poate atinge localitatea.
 - Arătați că, începând cu al șaselea an, populația localității este în creștere an de an.
 - Aflați după câți ani localitatea are mai mult de 1000 de locuitori.
- Deși aparent între prima și celelalte cerințe ale următorului enunț nu este nici o legătură, rezolvarea vă va convinge de contrariul.
 - Arătați că $|x| + |y| \geq |x - y|$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
 - Demonstrați că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, au loc inegalitățile:
 $|x - 1| + |x - 2015| \geq 2014$ și $|x - 2| + |x - 2014| \geq 2012$.
 - Demonstrați că, pentru orice număr $x \in \mathbb{R}$, are loc inegalitatea:
 $|x - 1| + |x - 2| + \dots + |x - 2015| \geq 1007 \cdot 1008$.
 - Rezolvați ecuația $|x - 1| + |x - 2| + \dots + |x - 2015| = 1007 \cdot 1008$, în necunoscuta $x \in \mathbb{R}$.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ
2 mai 2015



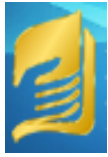
FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA A X-A

1. Numerele reale a, b, c verifică simultan relațiile $2^a = 12$, $8^b = 6$ și $27^c = 9$. Arătați că:
 - a) Are loc egalitatea $2a = 6b + 3c$.
 - b) Numerele a și b sunt iraționale ($a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) iar c este rațional ($c \in \mathbb{Q}$).
 - c) Are loc inegalitatea $a + b + c > 5$.
2. Deși aparent între cerința I și cerințele II ale următorului enunț nu este nici o legătură, rezolvarea vă va convinge de contrariul.
 - I. Dacă $z \in \mathbb{C}$, atunci $|z| < 1$ dacă și numai dacă $|2 - z \cdot i| > |2z + i|$.
 - II. Dacă z este un număr complex astfel încât $2z^5 + z^4 \cdot i + z \cdot i - 2 = 0$, arătați că:
 - a) $z \neq -\frac{1}{2} \cdot i$;
 - b) $z^4 = \frac{2 - z \cdot i}{2 \cdot z + i}$;
 - c) $|z| = 1$.
3. La un concurs de matematică s-au dat trei probleme și fiecare elev participant a rezolvat complet cel puțin una din problemele date. Premiile au constat în cărți și fiecare participant a primit un număr de cărți egal cu numărul de probleme rezolvate complet de el. Totodată, se știu și următoarele:
 - o fracțiune de $\frac{5}{12}$ din numărul participanților la concurs au rezolvat complet doar primele două probleme;
 - o fracțiune de $\frac{1}{6}$ din numărul participanților la concurs au rezolvat doar prima și a treia problemă;
 - o fracțiune de $\frac{2}{15}$ din numărul participanților la concurs a rezolvat complet doar a doua și a treia problemă;
 - doar 6 participanți la concurs au rezolvat complet toate cele trei probleme.Dacă la festivitatea de premiere s-au acordat cu titlu de premiu 1042 de cărți, aflați câți elevi au participat la concurs.
4. Fie n un număr natural, $n \geq 2$ și a_n numărul tuturor numerelor de n cifre, care au produsul cifrelor egal cu 8. Se cere:
 - a) Determinați a_2 și a_3 .
 - b) Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $a_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.
 - c) Aflați n pentru care $a_n = 120$.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ
2 mai 2015



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA A XI-A

1. Fie matricea $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ x & y & 1 \end{pmatrix}$ și punctele $A(1; 2)$, $B(0; 3)$, $C_n(2n-2; 5-2n)$, $n \in \mathbb{N}$,

reprezentate în reperul cartezian xOy . Se cere:

- Să se calculeze determinantul matricei M .
- Să se arate că punctele A , B și C_n sunt coliniare, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.
- Să se determine valorile $n \in \mathbb{N}$ pentru care aria triunghiului AOC_n este minimă.

2. I. Calculați limitele:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{10-3x}}{x+1 - \sqrt{x+7}}$; b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 400x - 1}{x^2 - 3x + 2} \right)^{5x}$

II. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție care, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, verifică relația $|f(x) - e^x| \leq x^2$. Arătați că:

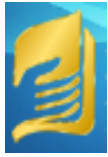
- f este continuă în $x=0$
 - f este derivabilă în $x=0$ și $f'(0)=1$
3. a) Arătați că există o infinitate de matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $A^2 = I_2$.

b) Fie $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Arătați că $B^3 = I_3$.

c) Demonstrați că există o infinitate de matrice $C \in M_3(\mathbb{R})$ cu proprietatea $C^3 = I_3$.

4. În condiții de laborator, o populație de bacterii se dezvoltă după legea $N(t) = 50t - e^{0.5t} + 2015 - 200 \cdot \ln 10$, unde t este timpul măsurat în ore iar $N(t)$ este numărul de indivizi la momentul t .
- Folosind eventual mărginirea $e > 2,5$ a bazei e a logaritmului natural, arătați că la momentul inițial $t=0$ populația de bacterii are mai mult de 1400 de indivizi.
 - Aflați care este numărul maxim de indivizi la care poate ajunge populația de bacterii.
 - Demonstrați că, în aceste condiții, după un anumit timp populația de bacterii dispare.

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ
2 mai 2015



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA A XII-A

1. Fie mulțimea $G = \{a + b\sqrt{7} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ și } a^2 - 7b^2 = 1\}$
 - a) Arătați că operația de înmulțire a numerelor reale este lege de compoziție pe G și $(G; \cdot)$ este grup abelian.
 - b) Determinați un element $x \in G$, $x = a + b\sqrt{7}$, cu $a > 0$ și $b > 0$.
 - c) Arătați că mulțimea G are o infinitate de elemente.
2. Rata de creștere a populației unei localități, notată $f(t)$, verifică relația $(2t+1)f(t) = f'(t) \cdot (t^2 + t + 10)$, unde $t \geq 0$ reprezintă timpul, măsurat în ani, scurs de la momentul $t = 0$ care corespunde anului 2000.
 - a) Determinați mulțimea primitivelor funcției $g: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(t) = \frac{2t+1}{t^2+t+10}$.
 - b) Arătați că există $k > 0$ încât $f(t) = k \cdot (t^2 + t + 10)$, pentru orice $t \geq 0$.
 - c) Dacă în anul 2015 numărul de locuitori al localității, verificat prin legea $f(t)$, este de 25000 de locuitori, aflați care va fi numărul de locuitori estimat cu această lege pentru anul 2030.
3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$
 - a) Calculați $\int_{-1}^{10} e^x \cdot f(x) dx$.
 - b) Considerând suprafața plană delimitată de axa Ox , graficul funcției f și dreptele de ecuație $x = 0$ și $x = 4$, determinați $a > 0$ pentru care dreapta de ecuație $x = a$ împarte această suprafață în două suprafețe de arii egale.
 - c) Determinați $b \in \mathbb{R}$ pentru care volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(bx)$ este minim.
4. Fie polinomul $f = 3X^3 - aX^2 + aX - 3$, $a \in \mathbb{R}$.
 - a) Arătați că f se divide cu polinomul $g = X - 1$.
 - b) Determinați pentru ce valori $a \in \mathbb{R}$ ecuația $f(x) = 0$ are trei rădăcini reale.
 - c) Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care $|x_1| + |x_2| + |x_3| = 3$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f .

Notă: Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.