INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA NAȚIONALĂ
2 mai 2015

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protectia mediului

CLASA A IX-A

1. O barcă merge pe un râu în aval (în sensul curgerii râului) și în amonte (în sens opus curgerii râului), parcurgând în total $56\,km$ în 3 ore. Viteza bărcii în aval este de 20 km/h iar în amonte de 16 km/h. Se cere:

a) Determinați viteza curentului apei pe râu și viteza pe care ar fi avut-o barca dacă s-ar fi deplasat uniform, în aceleași condiții, pe un lac.

b) Determinați cele două distanțe parcurse de barcă pe râu, prima în aval și a doua în amonte.

2. Fie patrulaterul convex $ABCD$ și $M \in (AC)$, $N \in (BD)$ mijloacele diagonalelor.

a) Arătați că $2 \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.

b) Dacă punctele M și N coincid, demonstrați că $ABCD$ este paralelogram.

3. În cadrul unui studiu demografic s-a constatat că numărul a_n de locuitori ai unei localități nou înființate, în care $n \in \mathbb{N}$ este numărul de ani scurs de la înființarea localității, este modelat prin relația $a_{n+1} - a_n = 2n - 11$, cu număr de locuitori inițial $a_0 = 100$.

a) Aflați, prin această relație, câți locuitori ar avea localitatea după doi ani de la înființare.

b) Arătați că $a_n = n^2 - 12n + 100$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

c) Determinați numărul minim de locuitori pe care îl poate atinge localitatea.

d) Arătați că, începând cu al șaselea an, populația localității este în creștere an de an.

e) Aflați după câți ani localitatea are mai mult de 1000 de locuitori.

4. Deși aparent între prima și celelalte cerințe ale următorului enunț nu este nici o legătură, rezolvarea vă va convinge de contrariul.

a) Arătați că $|x| + |y| \geq |x - y|$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Demonstrați că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, au loc inegalitățile:
$|x-1| + |x-2015| \geq 2014$ și $|x-2| + |x-2014| \geq 2012$.

c) Demonstrați că, pentru orice număr $x \in \mathbb{R}$, are loc inegalitatea:
$|x-1| + |x-2| + \ldots + |x-2015| \geq 1007 \cdot 1008$.

d) Rezolvați ecuația $|x-1| + |x-2| + \ldots + |x-2015| = 1007 \cdot 1008$, în necunoscuta $x \in \mathbb{R}$.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
2 mai 2015

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protectia mediului

CLASA A X-A

1. Numerele reale a, b, c verifică simultan relațiile $2^a = 12$, $8^b = 6$ și $27^c = 9$. Arătați că:

a) Are loc egalitatea $2a = 6b + 3c$.

b) Numerele a și b sunt iraționale $(a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ iar c este rațional $(c \in \mathbb{Q})$.

c) Are loc inegalitatea $a + b + c > 5$.

2. Deși aparent între cerința I și cerințele II ale următorului enunț nu este nici o legătură, rezolvarea vă va convinge de contrariul.

I. Dacă $z \in \mathbb{C}$, atunci $|z| < 1$ dacă și numai dacă $|2 - z \cdot i| > |2z + i|$.

II. Dacă z este un număr complex astfel încât $2z^5 + z^4 \cdot i + z \cdot i - 2 = 0$, arătați că:

a) $z \neq -\frac{1}{2} \cdot i$; b) $z^4 = \frac{2 - z \cdot i}{2 \cdot z + i}$; c) $|z| = 1$.

3. La un concurs de matematică s-au dat trei probleme și fiecare elev participant a rezolvat complet cel puțin una din problemele date. Premiile au constat în cărți și fiecare participant a primit un număr de cărți egal cu numărul de probleme rezolvate complet de el. Totodată, se știu și următoarele:

- o fracțiune de $\frac{5}{12}$ din numărul participanților la concurs au rezolvat complet doar primele două probleme;
- o fracțiune de $\frac{1}{6}$ din numărul participanților la concurs au rezolvat doar prima și a treia problemă;
- o fracțiune de $\frac{2}{15}$ din numărul participanților la concurs a rezolvat complet doar a doua și a treia problemă;
- doar 6 participanți la concurs au rezolvat complet toate cele trei probleme.

Dacă la festivitatea de premiere s-au acordat cu titlu de premiu 1042 de cărți, aflați câți elevi au participat la concurs.

4. Fie n un număr natural, $n \geq 2$ și a_n numărul tuturor numerelor de n cifre, care au produsul cifrelor egal cu 8. Se cere:

a) Determinați a_2 și a_3.

b) Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $a_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

c) Aflați n pentru care $a_n = 120$.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAŢIONALĂ
2 mai 2015

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protectia mediului

CLASA A XI-A

1. Fie matricea $M=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 1\\ x & y & 1\end{pmatrix}$ şi punctele $A(1;2)$, $B(0;3)$, $C_n(2n-2;5-2n)$, $n\in\mathbb{N}$, reprezentate în reperul cartezian xOy. Se cere:

a) Să se calculeze determinantul matricei M.

b) Să se arate că punctele A, B şi C_n sunt coliniare, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

c) Să se determine valorile $n\in\mathbb{N}$ pentru care aria triunghiului AOC_n este minimă.

2. I. Calculaţi limitele:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{10-3x}}{x+1-\sqrt{x+7}}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+400x-1}{x^2-3x+2}\right)^{5x}$

II. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie care, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, verifică relaţia $\left|f(x)-e^x\right|\le x^2$. Arătaţi că:

a) f este continuă în $x=0$

b) f este derivabilă în $x=0$ şi $f'(0)=1$

3. a) Arătaţi că există o infinitate de matrice $A\in M_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $A^2=I_2$.

b) Fie $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Arătaţi că $B^3=I_3$.

c) Demonstraţi că există o infinitate de matrice $C\in M_3(\mathbb{R})$ cu proprietatea $C^3=I_3$.

4. În condiţii de laborator, o populaţie de bacterii se dezvoltă după legea $N(t)=50t-e^{0,5t}+2015-200\cdot\ln 10$, unde t este timpul măsurat în ore iar $N(t)$ este numărul de indivizi la momentul t.

a) Folosind eventual mărginirea $e>2,5$ a bazei e a logaritmului natural, arătaţi că la momentul iniţial $t=0$ populaţia de bacterii are mai mult de 1400 de indivizi.

b) Aflaţi care este numărul maxim de indivizi la care poate ajunge populaţia de bacterii.

c) Demonstraţi că, în aceste condiţii, după un anumit timp populaţia de bacterii dispare.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
2 mai 2015

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale şi protectia mediului

CLASA A XII-A

1. Fie mulțimea $G=\left\{a+b\sqrt{7}\,/\,a,\,b\in\mathbb{Z} \text{ şi } a^2-7b^2=1\right\}$

a) Arătați că operația de înmulțire a numerelor reale este lege de compoziție pe G și $(G;\cdot)$ este grup abelian.

b) Determinați un element $x\in G$, $x=a+b\sqrt{7}$, cu $a>0$ și $b>0$.

c) Arătați că mulțimea G are o infinitate de elemente.

2. Rata de creștere a populației unei localități, notată $f(t)$, verifică relația $(2t+1)f(t)=f'(t)\cdot(t^2+t+10)$, unde $t\geq 0$ reprezintă timpul, măsurat în ani, scurs de la momentul $t=0$ care corespunde anului 2000.

a) Determinați mulțimea primitivelor funcției $g:[0;+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(t)=\dfrac{2t+1}{t^2+t+10}$.

b) Arătați că există $k>0$ încât $f(t)=k\cdot(t^2+t+10)$, pentru orice $t\geq 0$.

c) Dacă în anul 2015 numărul de locuitori al localității, verificat prin legea $f(t)$, este de 25000 de locuitori, aflați care va fi numărul de locuitori estimat cu această lege pentru anul 2030.

3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2$

a) Calculați $\int_{-1}^{10} e^x\cdot f(x)\,dx$.

b) Considerând suprafața plană delimitată de axa Ox, graficul funcției f și dreptele de ecuație $x=0$ și $x=4$, determinați $a>0$ pentru care dreapta de ecuație $x=a$ împarte această suprafață în două suprafețe de arii egale.

c) Determinați $b\in\mathbb{R}$ pentru care volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0;1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(bx)$ este minim.

4. Fie polinomul $f=3X^3-aX^2+aX-3$, $a\in\mathbb{R}$.

a) Arătați că f se divide cu polinomul $g=X-1$.

b) Determinați pentru ce valori $a\in\mathbb{R}$ ecuația $f(x)=0$ are trei rădăcini reale.

c) Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care $|x_1|+|x_2|+|x_3|=3$, unde $x_1,\,x_2,\,x_3$ sunt rădăcinile polinomului *f*.

<u>Notă:</u> *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*